WYKŁAD 5

RÓWNANIE EULERA I JEGO CAŁKI PIERWSZE

RÓWNANIE EULERA

W **Wykładzie nr 4** wyprowadziliśmy ogólne r-nie ruchu płynu i pokazaliśmy jego szczególny (de facto najprostszy) wariant zwany Równaniem Eulera. Równanie to opisuje ruch najprostszego (oczywiście hipotetycznego) ośrodka płynnego zwanego płynem idealnym. W sensie mechanicznym „idealność" tego płynu polega na braku zdolności do przenoszenia naprężeń stycznych, czyli przejawia się brakiem lepkości.

Standardowa postać równania Eulera to

$$\rho\left[\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla p + \rho \boldsymbol{f}$$

Ze względu na brak lepkości, **w opływie ciała płynem idealnym występuję poślizg płynu na powierzchni tego ciała**.

Innymi słowy: styczna do powierzchni ciała składowa prędkości płynu jest na ogół inna niż prędkość samej powierzchni. Jeżeli ciało jest nieprzenikalne dla płynu (brak transpiracji), to ma oczywiście miejsce zgodność składowej normalnej (i tylko tej) prędkości powierzchni ciała i prędkości płynu na tej powierzchni.

Pokażemy, że przy pewnych założeniach można uzyskać z równania Eulera związki algebraiczne (tj. nie różniczkowe) pomiędzy wielkościami opisującymi ruch płynu. Związki takie zwane są **całkami pierwszymi** tego równania.

Zacznijmy od przypomnienia, że przyspieszenie konwekcyjne płynu może być przedstawione w formie **Lamba-Gromeki**

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \quad ,$$

gdzie $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{v}$ to wirowość. R-nie Eulera może być zatem zapisane jako

$$\partial_t\boldsymbol{v} + \nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$$

<u>Załóżmy, że:</u>

(1) **przepływ jest ustalony** (stacjonarny), tj. żadna z wielkości przepływowych nie zależy jawnie od czasu,

(2) **pole sił objętościowych jest polem potencjalnym**, tj. istnieje pole skalarne Φ_f takie, że t $\boldsymbol{f} = \nabla\Phi_f$,

(3) **płyn jest barotropowy**, tj. istnieje obowiązujący w całym obszarze przepływu związek $\rho = \rho(p)$.

Wiemy z Wykładu nr 1, że jeżeli płyn jest barotropowy to istnieje funkcja (potencjał ciśnienia) P taka, że

$$P(p) := \int \frac{1}{\rho(p)} d\rho.$$

Wówczas $$\frac{\partial}{\partial x_i} P[p(\boldsymbol{x})] = P'[p(\boldsymbol{x})] \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Przypomnijmy również, że w przypadku **płynu nieściśliwego** (ρ stała) mamy $P = p / \rho$, natomiast w **przypadku gazu doskonałego w warunkach izentropowych** mamy

$$P = \frac{\kappa \, p}{(\kappa - 1)\rho} = c_p T = i \quad \text{(entalpia właściwa)}$$

Przy uczynionych założeniach równanie Eulera może być zapisane w następującej formie

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f\right) = \boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\omega}$$

Rozważmy teraz dowolną linię prądu. Wektor postaci $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\upsilon} / \upsilon$ obliczony w dowolnym punkcie tej linii jest (z definicji) jej wersorem stycznym w tym punkcie.

Obliczmy pochodną kierunkową …

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\tau}}\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f\right) := \nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f\right)\cdot\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\upsilon}\underbrace{\boldsymbol{\upsilon}\cdot(\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\omega})}_{\textit{iloczyn mieszany}!} = 0$$

Z powyższego wynika, że wyrażenie $\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f$ jest stałe wzdłuż wybranej linii prądu, czyli:

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f = C_B = const}$$

Otrzymana równość nosi nazwę **całki Bernoulliego** równania Eulera. Stała Bernoulliego C_B może być – na ogół – inna dla różnych linii prądu.

Kiedy stała Bernoulliego jest taka sama dla wszystkich linii prądu?

Jeśli iloczyn wektorowy $\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ to

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f\right) = 0 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f = const$$

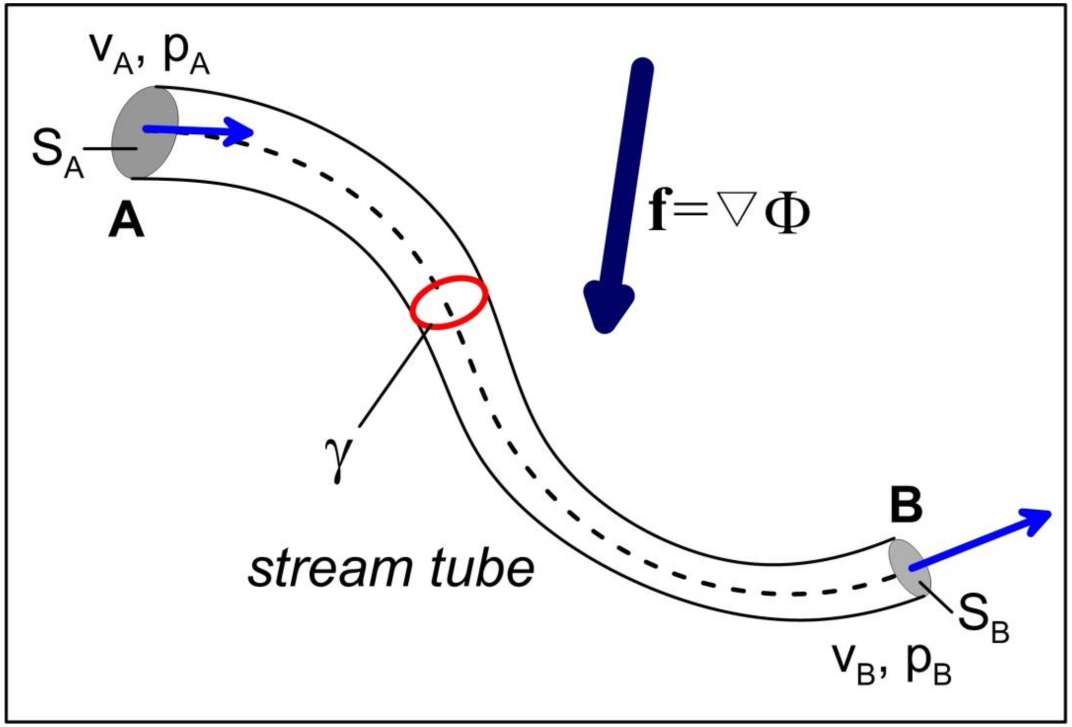
czyli wielkość w nawiasie jest taka sama w każdym punkcie obszaru przepływu. Jest to oczywiście warunek równoważny stwierdzeniu, że wartość stałej C_B jest globalna.

W szczególności, będzie tak, gdy wirowość $\boldsymbol{\omega}$ znika tożsamościowo w całym obszarze ruchu ($\boldsymbol{\omega} \equiv 0$). Jest to bardzo mocna własność, która implikuje, że pole prędkości jest potencjalnym polem wektorowym, tj. istnieje pole skalarne Φ_V takie, że $\boldsymbol{\upsilon} = \nabla \Phi_V$.

W praktyce, używamy równania Bernoulliego, które otrzymujemy zapisując równość wyrażenia $\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f$ obliczonego w dwóch różnych punktach A i B tej samej linii prądu (lub dwóch punktów w przepływie, jeżeli można przyjąć, że stała Bernoulliego jest globalna). Wygląda to tak …

$$\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f\right)_A = \left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + P - \Phi_f\right)_B$$

ZWIĄZEK RÓWNANIA BERONULLIEGO Z ZASADĄ ZACHOWANIA ENERGII



W niektórych inżynierskich podręcznikach hydrodynamiki można znaleźć „wyprowadzenie” równania Bernoulliego, którego zasadność jest ograniczona tylko do przepływów płynu nieściśliwego. Zademonstrujemy to podejście.

Rozważmy tzw. **rurkę prądu** (ang. stream rube) tj. obszar kontrolny ograniczony powierzchnią „utkaną” z linii prądy przechodzących przez zamkniętą linię (pętle) γ (obrazek), i rozciągający się między przekrojami A i B. Zakładamy, że charakterystyczny rozmiar poprzeczny obszaru jest bardzo mały w porównaniu z odległością A i B mierzoną wzdłuż linii prądu. Inna nazwa tak skonstruowanego obszaru to **struga**.

Obliczymy teraz zmianę energii kinetycznej płynu znajdującego się wdanej chwili w obszarze strugi, zachodzące w dowolnie krótkim interwale czasowym Δt.

Po pierwsze, z zasady zachowania objętości (płyn nieściśliwy) wynika, że wydatek objętościowy w każdym przekroju poprzecznym strugi jest identyczny. W szczególności, dla przekrojów wlotowego A i wylotowego B możemy napisać równość

$$Q_V \equiv S_\mathrm{A} \upsilon_\mathrm{A} = S_\mathrm{B} \upsilon_\mathrm{B}$$

Zmiana energii kinetycznej strumienia płynu pomiędzy wlotem A i wylotem B w czasie Δt wyraża się wzorem

$$\Delta E_{kin} \equiv \tfrac{1}{2} \underbrace{\rho Q_V \Delta t}_{\Delta m} \upsilon_\mathrm{B}^2 - \tfrac{1}{2} \underbrace{\rho Q_V \Delta t}_{\Delta m} \upsilon_\mathrm{A}^2 \equiv \tfrac{1}{2} \Delta m \upsilon_\mathrm{B}^2 - \tfrac{1}{2} \Delta m \upsilon_\mathrm{A}^2$$

Powodem zmiany energii kinetycznej jest praca wykonana przez siły zewnętrzne, wynikające z różnicy ciśnień i pole sił masowych o potencjale $\varPhi$.

Pracę tę wyraża wzór

$$W = \underbrace{p_\mathrm{A} S_\mathrm{A} \upsilon_\mathrm{A} \Delta t - p_\mathrm{B} S_\mathrm{B} \upsilon_\mathrm{B} \Delta t}_{\text{praca sily cisnieniowej}} + \underbrace{\Delta m (\varPhi_\mathrm{B} - \varPhi_\mathrm{A})}_{\substack{\text{praca zewnętrznego} \\ \text{pola potencjalnego}}}$$

Jak wiemy, ma miejsce równość

$$\Delta E_{kin} = W$$

Po podzieleniu jej przez Δm i przeniesieniu składników między stronami równości, otrzymujemy r-nie Bernoulliego

$$\tfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{A}}^{2} + \tfrac{1}{\rho}\, p_{\mathrm{A}} - \varPhi_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{B}}^{2} + \tfrac{1}{\rho}\, p_{\mathrm{B}} - \varPhi_{\mathrm{B}}$$

W szczególności, gdy polem sił objętościowych jest jednorodna grawitacja, mamy

$$\boldsymbol{f} = -g\,\boldsymbol{e}_z \;\Rightarrow\; \varPhi = -gz$$

i równanie Bernoulliego (po pomnożeniu przez gęstość) przyjmuje postać

$$\tfrac{1}{2}\rho\upsilon_{\mathrm{A}}^{2} + p_{\mathrm{A}} + \rho g z_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_{\mathrm{B}}^{2} + p_{\mathrm{B}} + \rho g z_{\mathrm{B}}$$

W polu sił będących sumą jednorodnej grawitacji i sił odśrodkowych (Przykład 3 z Wykładu nr 1) obowiązują formuły

$$\boldsymbol{f}(r,z)=\Omega^2 r\,\boldsymbol{e}_r - g\,\boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \quad \Phi=\tfrac{1}{2}\Omega^2 r^2 - gz$$

W takim przypadku równanie Bernoulliego wygląda następująco

$$\tfrac{1}{2}\rho\upsilon_{\mathrm{A}}^2 + p_{\mathrm{A}} - \tfrac{1}{2}\rho\Omega^2 r_{\mathrm{A}}^2 + \rho g z_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_{\mathrm{B}}^2 + p_{\mathrm{B}} - \tfrac{1}{2}\rho\Omega^2 r_{\mathrm{B}}^2 + \rho g z_{\mathrm{B}}$$

Zauważmy, że **w ogólnym przypadku równanie Bernoullliego jest wyprowadzane bez założenia nieściśliwości**!

W szczególności, RB może być wyprowadzone dla przypadku izentropowego ruchu gazy Clapeyrona. Z elementarnej termodynamiki wiemy (wiemy?), że w warunkach przemiany izentropowej ma miejsce **(globalny) związek pomiędzy gęstością a ciśnieniem gazu Clapeyrona**, a mianowicie

$$p=C\rho^{\kappa} \quad , \quad \kappa=\tfrac{c_p}{c_v}$$

Zatem, gaz w takich warunkach jest **płynem barotropowym** i funkcja ciśnienia P może być obliczona następująco

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{1}{C^{1/\kappa}} \int p^{-1/\kappa} dp = \frac{1}{1-(1/\kappa)} \frac{1}{C^{1/\kappa}} p^{1-1/\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}$$

W rezultacie, równanie Bernoulliego przyjmuje postać

$$\frac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{A}}^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}}} - \Phi_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{B}}^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_{\mathrm{B}}}{\rho_{\mathrm{B}}} - \Phi_{\mathrm{B}}$$

UWAGI:

1. W przypadku (typowych dla gazów) niewielkiej gęstości i słabych pól siłowych składnik zawierający potencjał Φ jest zwykle pomijany.
2. Otrzymane powyżej równanie Bernoulliego jest równoważne zasadzie zachowania energii całkowitej dla gazu (pokażemy to w jednym z następnych wykładów).

W przypadku ogólnym całka Bernoulliego nie ma jednak nic wspólnego z energią i jej zachowaniem. Oto odpowiedni kontrprzykład …

Rozważmy **izotermiczny ruch gazu Clapeyrona**, w którym gaz zachowuje ściśle stałą temperaturę. Jest oczywistym, że jeśli prędkość gazu nie jest wszędzie taka sama to ruch taki nie może istnieć bez zmian całkowitej energii (np. w wyniku dostarczania lub odbierania ciepła).

Skoro z założenia temperatura gazu jest stała to z równania stanu (Clapeyrona) wynika, że

$$\rho = \frac{1}{RT}\, p = Cp$$

Funkcję ciśnienia P obliczamy następująco

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{1}{C}\int p^{-1} dp = \frac{1}{C}\ln(p / p_{ref}) = RT\ln(p / p_{ref})$$

gdzie p_{ref} jest pewnym (dowolnie wybranym) ciśnieniem odniesienia.

Odpowiednie równanie Bernoulliego ma zatem następująco postać

$$\tfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{A}}^2 + RT\ln(p_{\mathrm{A}} / p_{ref}) - \Phi_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{B}}^2 + RT\ln(p_{\mathrm{B}} / p_{ref}) - \Phi_{\mathrm{B}}$$

i oczywiście **nie wyraża tym razem bilansu energii całkowitej gazu**.

Całka pierwsza Cauchy'ego-Lagrange'a

Całka Beroulliego nie jest jedyną całką pierwszą równania Eulera. Zmieniając nieco założenia można otrzymać inną całkę pierwszą zwaną **całką Cauchy'ego-Lagrange'a**.

Z porównaniu z całką Bernoulliego zmiana polega na odrzuceniu założenia stacjonarności przepływu – tym razem dopuszczamy, że **przepływ jest niestacjonarny**. Wzmacniamy natomiast znacząco założenia odnośnie pola prędkości przepływu, przyjmując, że pole to jest potencjalne. Oznacza to, że istnieje pole skalarne (potencjał prędkości) Φ_v takie, że

$$\boldsymbol{v} = \nabla \Phi_v$$

Wówczas, mają miejsce następujące równości

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_v\right) \quad , \quad \upsilon^2 = |\nabla \Phi_v|^2 .$$

Zauważmy, że **pole wirowości znika teraz tożsamościowo w obszarze przepływu**. Mówimy, że ruch płynu jest bezwirowy.

Wykonując podstawienia podobnie jak w przypadku całki Bernoulliego, otrzymujemy równanie

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_v+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi_v\right|^2+P-\Phi_f\right)=\mathbf{0}$$

Zerowanie się gradientu wyrażenia w nawiasie oznacza, że zależy ono co najwyżej od czasu co pozwala zapisać całkę pierwszą Cauchy'ego-Lagrange'a

$$\frac{\partial\Phi_v}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi_v\right|^2+P-\Phi_f=C(t)$$

W powyższym równaniu, funkcja czasu $C(t)$ jest dobrana dowolnie. W istocie, bez utraty ogólności można przyjąć $C(t)\equiv 0$.